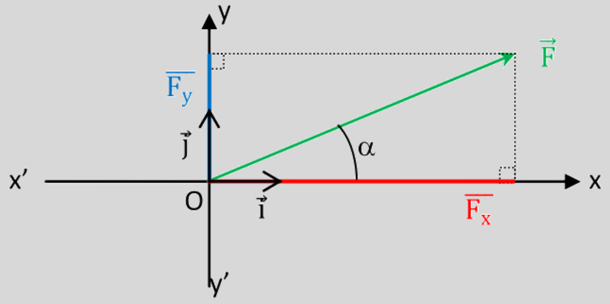
Chapitre 10 : Mouvement dans un champ uniforme

1. La chute libre

Rappel :



- La coordonnée $\overline{F_x}$ correspond à la projection du vecteur $\vec{F}$ sur l'axe des abscisses :

$$\cos\alpha = \frac{\overline{F_x}}{\|\vec{F}\|} \iff \overline{F_x} = \|\vec{F}\| \times \cos\alpha \iff \overline{F_x} = F \times \cos\alpha$$

- La coordonnée $\overline{F_y}$ correspond à la projection du vecteur $\vec{F}$ sur l'axe des ordonnées :

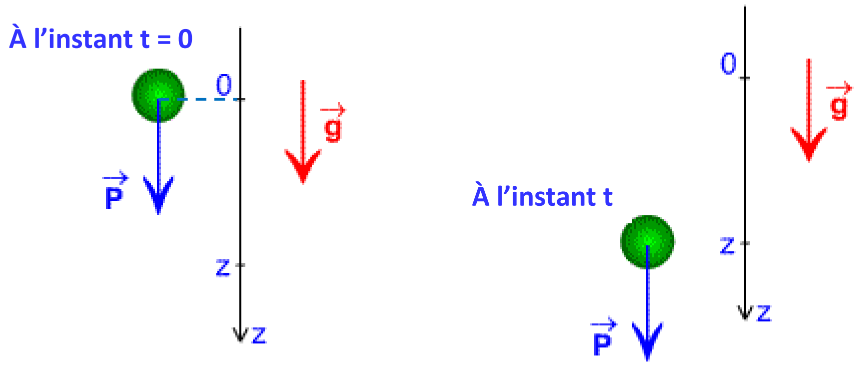
$$\sin\alpha = \frac{\overline{F_y}}{\|\vec{F}\|} \iff \overline{F_y} = \|\vec{F}\| \times \sin\alpha \iff \overline{F_y} = F \times \sin\alpha$$

Les équations horaires du mouvement sont :

Vitesse initiale nulle	$\vec{a}_G \begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = 0 \\ a_z(t) = g \end{cases} \overset{\text{Intégration}}{\Rightarrow} \vec{v}_G \begin{cases} v_x(t) = 0 \\ v_y(t) = 0 \\ v_z(t) = gt \end{cases} \overset{\text{Intégration}}{\Rightarrow} \overrightarrow{OG} \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = 0 \\ z(t) = \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$
Vitesse initiale non nulle	$\vec{a}_G \begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = 0 \\ a_z(t) = g \end{cases} \overset{\text{Intégration}}{\Rightarrow} \vec{v}_G \begin{cases} v_x(t) = 0 \\ v_y(t) = 0 \\ v_z(t) = gt + v_0 \end{cases} \overset{\text{Intégration}}{\Rightarrow} \overrightarrow{OG} \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = 0 \\ z(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \end{cases}$

$\rightarrow$ Le mouvement est rectiligne uniformément accéléré.

Démonstration : (cas d'une chute sans vitesse initiale)



<u>Système :</u> la balle de masse m, constante
<u>Référentiel :</u> référentiel terrestre (ou du laboratoire) supposé galiléen
<u>Bilan des forces :</u>

- Action mécanique exercée par la Terre sur l'objet : poids $\vec{P} = m \times \vec{g}$
- Frottements de l'air et poussée d'Archimède : considérés comme négligeables.

On peut appliquer la seconde loi de Newton : $\sum \vec{F} = m\ \vec{a}$

Comme ici, le poids est la seule force qui intervient (puisque les frottements de l'air et la poussée d'Archimède sont négligés) alors, l'expression ci-dessus devient :

$$\vec{P} = m\ \vec{a} \Leftrightarrow m \times \vec{g} = m\ \vec{a} \Leftrightarrow \vec{g} = \ \vec{a} \quad (1)$$

En projetant la relation (1) ci-dessus, dans le repère d'étude, on a :

$$\vec{a}_G \begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = 0 \\ a_z(t) = g \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_G \begin{cases} v_x(t) = 0 \\ v_y(t) = 0 \\ v_z(t) = gt + C_1 \end{cases}$$

<u>Conditions initiales :</u>
$z(t) = 0$
$v_z(t = 0) = 0 = 0 + C_1 \Leftrightarrow C_1 = 0$

$$\Rightarrow \vec{v}_G \begin{cases} v_x(t) = 0 \\ v_y(t) = 0 \\ v_z(t) = gt \end{cases}$$

$$\vec{v}_G \begin{cases} v_x(t) = 0 \\ v_y(t) = 0 \\ v_z(t) = gt \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OG} \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = 0 \\ z(t) = \frac{1}{2}gt^2 + C_2 \end{cases}$$

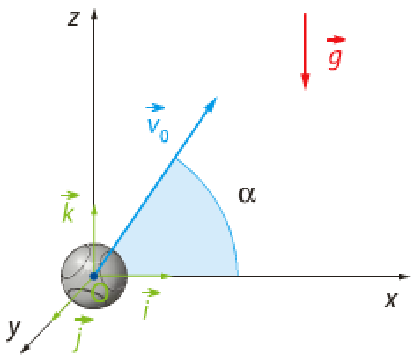
<u>Conditions initiales :</u>
$z(t = 0) = 0 = 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$
$v_z(t = 0) = 0$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OG} \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = 0 \\ z(t) = \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

<u>À RETENIR :</u>

Le vecteur accélération du centre d'inertie d'un système placé uniquement dans un champ de pesanteur ($\Leftrightarrow$ en chute libre) est égal au vecteur champ de pesanteur.

2. <u>Le mouvement parabolique</u>



En s'appuyant sur l'étude précédente, et en considérant que <u>seule</u> agit l'action mécanique exercée par la Terre sur la balle (on néglige l'action mécanique de l'air) et qui se modélise par le poids de la balle :

$$\vec{P} = m \times \vec{g}$$

La deuxième loi de Newton s'écrit (voir $2) : $\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

<u>Rappel :</u> $\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\left(m \times \vec{v}\right)}{dt} = \cancel{\frac{dm}{dt}}^{\,0} \times \vec{v} + m \times \frac{d\vec{v}}{dt} = m \times \frac{d\vec{v}}{dt} = m \times \vec{a}$

On en déduit, en combinant les deux expressions ci-dessus :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \times \vec{g} \Leftrightarrow m \times \vec{a} = m \times \vec{g} \Leftrightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{g}} \quad (2)$$

($\vec{a}$ et $\vec{v}$ étant, respectivement, les vecteurs accélération et vitesse du centre d'inertie de l'objet)

<u>Remarque :</u> on suppose que le poids est équivalent à la force de gravitation (on néglige la force d'inertie d'entrainement). Le projectile est aussi en mouvement par rapport au référentiel, on va donc négliger la force de Coriolis.

❖ Équations horaires du mouvement :

En projetant la relation (2) ci-dessus, dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on a :

$$\vec{g}\begin{cases} g_x = 0 \\ g_y = 0 \\ g_z = -g \end{cases} \overset{\text{Intégration}}{\Rightarrow} \vec{a}_G\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = 0 \\ a_z = -g \end{cases} \overset{\text{Intégration}}{\Leftrightarrow} \vec{v}_G\begin{cases} v_x(t) = C_1 \\ v_y(t) = C_2 \\ v_z(t) = -gt + C_3 \end{cases} \overset{\text{Intégration}}{\Leftrightarrow} \overrightarrow{OG}\begin{cases} x(t) = C_1 t + C_4 \\ y(t) = C_2 t + C_5 \\ z(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + C_3 t + C_6 \end{cases}$$

Les constantes C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 et C_6 sont déterminées à partir des conditions initiales (à t = 0 s) qui sont :

$$C_1 = v_0\cos\alpha \;\;;\;\; C_2 = 0 \;\;;\;\; C_3 = v_0\sin\alpha \;\;;\;\; C_4 = 0 \;\;;\;\; C_5 = 0 \;\;;\;\; C_6 = 0$$

On en déduit :

$$\boxed{\vec{a}_G\begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = 0 \\ a_z(t) = -g \end{cases} \overset{\text{Intégration}}{\Rightarrow} \vec{v}_G\begin{cases} v_x(t) = v_0\cos\alpha \\ v_y(t) = 0 \\ v_z(t) = -gt + v_0\sin\alpha \end{cases} \overset{\text{Intégration}}{\Rightarrow} \overrightarrow{OG}\begin{cases} x(t) = (v_0\cos\alpha)t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + (v_0\sin\alpha)t \end{cases} \quad \text{avec } \alpha = \left(\vec{v}_0;\vec{i}\right)}$$

❖ Équation de la trajectoire

$$t = \frac{x}{v_0\cos\alpha} \Rightarrow \boxed{z(x) = -\frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + (\tan\alpha)x}$$

⇒ Le mouvement du projectile est une parabole de sommet S.

❖ Portée du projectile : OP

La portée est définie par z = 0 $\Leftrightarrow 0 = -\dfrac{1}{2}\dfrac{g}{v_0^2\cos^2\alpha}(OP)^2 + \tan\alpha(OP) \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\dfrac{g}{v_0^2\cos^2\alpha}(OP)^2 = \tan\alpha(OP)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\frac{g}{v_0^2\cos^2\alpha}(OP) = \tan\alpha \Leftrightarrow OP = \tan\alpha\times\frac{2v_0^2\cos^2\alpha}{g} \Leftrightarrow OP = \frac{2v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{OP} = \frac{\mathbf{v_0^2}}{\mathbf{g}}\mathbf{\sin 2}\alpha}$$

$\boxed{\text{Rappel : } \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha}$

❖ Flèche (altitude maximale atteinte) : S

S est tel que : $x = \dfrac{OP}{2}$ ou $\dfrac{dz}{dx} = 0$

$x = \dfrac{OP}{2} = \dfrac{v_0^2}{2g}\sin 2\alpha$	$\dfrac{dz}{dx} = 0$
$\Leftrightarrow z_S = -\dfrac{1}{2}\dfrac{g}{v_0^2\cos^2\alpha}\left(\dfrac{v_0^2}{2g}\sin 2\alpha\right)^2 + \tan\alpha\left(\dfrac{v_0^2}{2g}\sin 2\alpha\right)$ $\Leftrightarrow z_S = -\dfrac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g} + \dfrac{v_0^2\sin^2\alpha}{g} \Leftrightarrow \boxed{\mathbf{z_S} = \dfrac{\mathbf{v_0^2\sin^2}\alpha}{\mathbf{2g}}}$	$\Leftrightarrow \dfrac{dz}{dx} = 0 = -\dfrac{g}{v_0^2\cos^2\alpha}x + \tan\alpha$ $\Leftrightarrow x = \tan\alpha\dfrac{v_0^2\cos^2\alpha}{g} = \dfrac{v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \dfrac{v_0^2\sin 2\alpha}{2g}$ $\Leftrightarrow \boxed{\mathbf{z_S} = \dfrac{\mathbf{v_0^2\sin^2}\alpha}{\mathbf{2g}}}$

Ainsi, z_S est maximale si $\sin^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \sin\alpha = \pm 1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \frac{\pi}{2}}$ (seule valeur acceptable)

❖ Portée maximale

$\mathrm{OP} = \frac{v_0^2}{\mathrm{g}}\sin 2\alpha$ est maximale si $\sin 2\alpha$ est maximal $\Leftrightarrow \sin 2\alpha = 1 \Leftrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} = 45°$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathbf{OP_{max}} = \frac{\mathbf{v_0^2}}{\mathbf{g}}}$$

L'altitude maximale, pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$, sera : $\boxed{z_{S_{max}} = \frac{v_0^2}{4g}}$ (sin 45° = $\frac{\sqrt{2}}{2}$)

❖ Angle α pour que la trajectoire passe par un point A(x_A, z_A)

$$\boxed{\frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha}$$

$$z = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{g}}{v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + (\tan\alpha)x = -\frac{\mathrm{g}}{2v_0^2}\left(1+\tan^2\alpha\right)x^2 + (\tan\alpha)x \quad \Rightarrow \tan^2\alpha - \frac{2v_0^2}{\mathrm{g}x}\tan\alpha + \left(\frac{2v_0^2 z}{\mathrm{g}x^2} + 1\right) = 0$$

Cette équation du 2nd degré admet une solution réelle ssi : $\Delta = \left(\frac{2v_0^2}{\mathrm{g}x}\right)^2 - 4\left(\frac{2v_0^2 z}{\mathrm{g}x^2} + 1\right) \geq 0 \Leftrightarrow \mathbf{z} \leq \frac{\mathbf{v_0^2}}{\mathbf{2g}} - \frac{\mathbf{g}}{\mathbf{2v_0^2}}\mathbf{x^2}$

Pour A, $x = x_A$ et $z = z_A$. Il existe 2 angles de tir possibles (résolution de l'équation du second degré) :

- Angle de tir α_1 :

$$\tan\alpha_1 = \frac{\frac{2v_0^2}{\mathrm{g}x} + \sqrt{\Delta}}{2} \Leftrightarrow \alpha_1 = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{2v_0^2}{\mathrm{g}x} + \sqrt{\Delta}}{2}\right)$$

- Angle de tir α_2 :

$$\tan\alpha_2 = \frac{\frac{2v_0^2}{\mathrm{g}x} - \sqrt{\Delta}}{2} \Leftrightarrow \alpha_2 = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{2v_0^2}{\mathrm{g}x} - \sqrt{\Delta}}{2}\right)$$

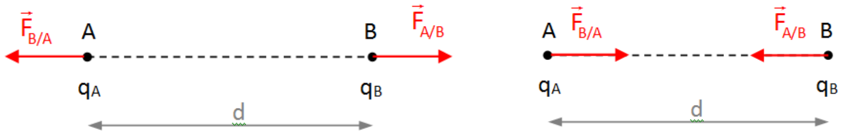
Remarque : le vecteur vitesse du centre d'inertie d'un corps placé uniquement dans un champ de pesanteur ne dépend pas de la masse de ce corps.

3. Particule chargée dans un champ électrostatique

3.1. Champ électrostatique [Rappels de $1^{ère}$]

La loi de Coulomb

Deux charges électriques, q_A et q_B, exercent l'une sur l'autre des forces d'interaction électrostatique dont la valeur est proportionnelle à chacune des charges et inversement proportionnelle au carré de la distance **d** qui les sépare.



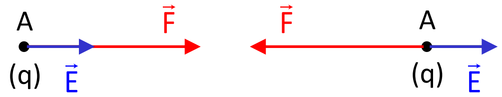
(q_A et q_B sont de même signe) (q_A et q_B sont de signe contraire)

$$\boxed{F_{A/B} = F_{B/A} = k \times \frac{|q_A| \times |q_B|}{d^2}}$$

q_A et q_B : charges (en C)
$k = 9 \times 10^9\ N.m^2.C^{-2}$
d = distance entre q_A et q_B (en m)
$F_{A/B}$ et $F_{B/A}$: intensités (en N)

Définition :

Le champ électrostatique est un champ vectoriel créé par une charge électrique, il est dirigé selon la force électrostatique $\vec{F}$ qui modélise l'action mécanique agissant sur une autre charge **q**. il se note $\vec{E}$ et s'exprime en **newton par coulomb** (*symbole* : $N.C^{-1}$) ou en **volt par mètre** (*symbole* : $V.m^{-1}$). Il est défini par :



q > 0 **q < 0**

$\boxed{1\ N.C^{-1} = 1\ V.m^{-1}}$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}}$$

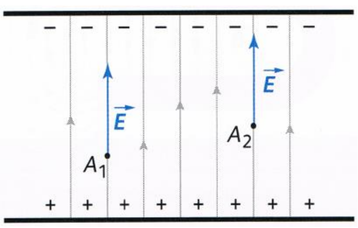
Ses caractéristiques sont :

- **Direction :** **même direction que F si q > 0, direction opposée sinon ;**
- **Sens :** **même sens que $\vec{F}$ si q > 0, sens opposé sinon ;**
- **Point d'application :** **un point du lieu considéré, où se trouve la charge q ;**
- **Intensité :**

$$\boxed{E = \frac{F}{|q|}}$$

F = force électrostatique exercée par la charge sur la charge q (en N)
q = valeur de la charge sur laquelle s'applique F (en C)
E = intensité du champ électrostatique (en $N.C^{-1}$)

Application : le condensateur plan



Un **condensateur plan** est formé par deux plaques métalliques (appelées **armatures**) parallèles séparées par un **isolant électrique** (appelé **diélectrique**). Lorsqu'on impose une tension **U** entre les deux plaques, des charges électriques positives apparaissent sur l'une des plaques et des charges négatives sur l'autre : un champ électrostatique (ou électrique ici) est créé entre ces deux plaques et dans leur voisinage (figure ci-contre).

Caractéristiques du champ électrostatique $\vec{E}$ à l'intérieur d'un condensateur :

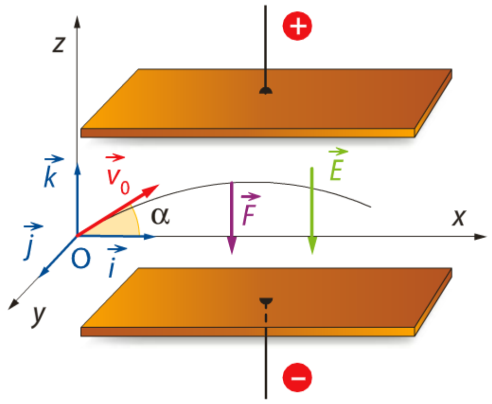
- Le champ est **uniforme** ;
- **Direction** : orthogonale (perpendiculaire) aux plaques ;
- **Sens** : de la plaque chargée positivement vers la plaque chargée négativement (⇔ du « ⊕ vers le ⊖ ») ;

- Sa **valeur** :

$$\boxed{E = \frac{|U|}{d}} \quad \left| \begin{array}{l} U = \text{tension entre les deux plaques (en V)} \\ d = \text{distance entre les deux plaques (en m)} \\ E = \text{intensité du champ (en V.m}^{-1}\text{)} \end{array} \right.$$

3.2. Étude dynamique et cinématique

On étudie une particule ponctuelle (charge), de charge q et de masse m, qui pénètre à l'instant $t = 0$ avec une vitesse $\vec{v}_0$ dans un champ électrostatique uniforme $\vec{E}$, perpendiculaire aux armatures d'un condensateur plan. Son poids étant négligeable. L'étude s'effectue dans le référentiel du laboratoire considéré comme galiléen.



Système : particule ponctuelle de charge q et de masse m

Référentiel : référentiel du laboratoire, supposé galiléen

Bilan des forces : $\vec{F} = q \times \vec{E}$

On se place dans un repère d'espace orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$)

La deuxième loi de Newton permet d'écrire :

$$\sum \vec{F} = m\,\vec{a}(t) \quad \Leftrightarrow \quad q \times \vec{E} = m\,\vec{a}(t) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\vec{a}(t) = \frac{q}{m} \times \vec{E}}$$

❖ Équations horaires du mouvement :

$$\vec{a}_G \begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = 0 \\ a_z(t) = -\dfrac{q \times E}{m} \end{cases} \overset{\text{Intégration}}{\Rightarrow} \vec{v}_G \begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos\alpha \\ v_y(t) = 0 \\ v_z(t) = -\dfrac{q \times E}{m} t + v_0 \sin\alpha \end{cases} \overset{\text{Intégration}}{\Rightarrow} \overrightarrow{OG} \begin{cases} x(t) = (v_0 \cos\alpha)t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{q \times E}{m} t^2 + (v_0 \sin\alpha)t \end{cases}$$

❖ Équation de la trajectoire

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \quad \Rightarrow \quad \boxed{z(x) = -\frac{1}{2}\frac{q \times E}{m \times v_0^2 \times \cos^2\alpha} x^2 + (\tan\alpha)x}$$

À RETENIR :

- Le vecteur accélération du centre d'inertie d'une particule chargée placée dans un champ électrostatique est dirigée selon le vecteur champ électrostatique ;
- Le mouvement du centre d'inertie d'une particule chargée placée dans un champ électrostatique uniforme avec une vitesse initiale non nulle, s'effectue dans un plan formé par les vecteurs $\vec{v}_0$ et $\vec{E}$;
- La trajectoire du centre d'inertie d'une particule chargée placée dans un champ électrostatique uniforme avec une vitesse initiale non nulle est une parabole dont la concavité dépend du signe de la charge q.