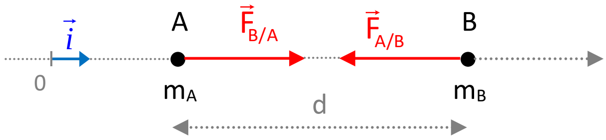
Chapitre 11 : Les lois de Kepler

1. Force de gravitation [Rappel]

Définition

L'interaction gravitationnelle entre deux corps ponctuels, A et B, de masses respectives m_A et m_B, séparés d'une distance d, est modélisée par des forces d'attraction gravitationnelles, $\vec{F}_{A/B}$ et $\vec{F}_{B/A}$, dont les caractéristiques sont :



$$\boxed{\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A} = -G\frac{m_A \times m_B}{d^2}\vec{i}}$$

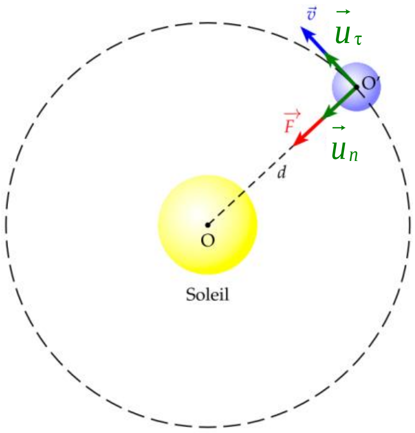
- m_A et m_B = masses respectives de A et B (en kg)
- G = $6{,}67.10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2} (constante de gravitation)
- d = distance entre A et B (en m)
- $F_{A/B}$ et $F_{B/A}$ (en N)

$\Rightarrow$ **$\vec{F}_{A/B}$ et $\vec{F}_{B/A}$ ont donc même direction, même valeur mais sont de sens opposé.**

2. Mouvement des planètes et des satellites

2.1. Vitesse d'une planète ou d'un satellite

Pour étudier le mouvement d'une planète (ou d'un satellite), de masse m, autour du Soleil (par exemple), de masse M_S, on se place dans le référentiel héliocentrique considéré comme galiléen et on utilise le repère de Frenet (O', $\vec{u}_n$, $\vec{u}_\tau$).



On suppose que la trajectoire de la planète est un cercle de centre O et de rayon d (ci-contre).

La planète n'est soumise qu'à une seule force, la force d'attraction du Soleil.

Comme le référentiel héliocentrique est considéré comme galiléen, et que la seule force en présence est la force de gravitation, d'après la deuxième loi de Newton, on peut écrire :

$$\vec{F} = m \times \vec{a} \Leftrightarrow G \times \frac{m \times M_S}{d^2}\vec{N} = m \times \vec{a} \Leftrightarrow \vec{a} = G \times \frac{M_S}{d^2}\vec{N}$$

Comme la force de gravitation est dirigée vers le centre du Soleil, l'accélération est normale et donc l'accélération tangentielle est nulle :

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0 \text{ et } a = a_n = \frac{v^2}{d} \text{ (mouvement circulaire uniforme)}$$

$\Rightarrow$ La vitesse est donc constante et le mouvement de la planète est un mouvement circulaire uniforme.

On en déduit que :

$$\frac{v^2}{d} = G \times \frac{M_S}{d^2} \Leftrightarrow \boxed{v = \sqrt{G \times \frac{M_S}{d}}}$$

2.2. Période de révolution d'une planète ou d'un satellite

Soit T la période de révolution (durée mise par un astre pour accomplir une révolution complète (tour complet) autour d'un autre astre) de la planète autour du Soleil. Comme durant la période T, la planète parcourt la circonférence du cercle de rayon d à la vitesse constante v, on a :

$$v = \frac{2\pi d}{T} \Leftrightarrow \frac{2\pi d}{T} = \sqrt{G \times \frac{M_S}{d}} \Leftrightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{d^3}{G \times M_S}}}$$

Remarque : on constate que le carré de la période de révolution est proportionnel au cube du rayon du cercle (c'est la troisième loi de Kepler, voir §3).

A RETENIR :

- Une planète ou un satellite tournant autour de son astre attracteur a un vecteur accélération dirigé vers le centre de sa trajectoire circulaire : son mouvement est **circulaire et uniforme** ;
- Pour un mouvement circulaire uniforme, l'accélération et la vitesse d'une planète ou d'un satellite sont reliés par une relation :

$$\boxed{a = \frac{v^2}{R}} \quad \begin{cases} v = \text{vitesse (en m.s}^{-1}\text{)} \\ R = \text{rayon de l'orbite circulaire (en m)} \\ a = \text{accélération (en m.s}^{-2}\text{)} \end{cases}$$

2.3. Les satellites géostationnaires

Pour être géostationnaire, un satellite doit, dans le référentiel géocentrique, satisfaire à plusieurs conditions :

- Il doit décrire un cercle dans un plan perpendiculaire à l'axe des pôles. Ce plan est nécessairement celui qui contient l'équateur terrestre : le plan de l'orbite du satellite est équatorial ;
- Le sens du mouvement doit être le même que celui de la rotation de la Terre autour de l'axe des pôles ;
- La période de révolution doit être égale à la période de rotation propre (ou sidérale) [(1)] de la Terre :

T = 1 jour sidéral = 23 h 56 min 4s = 86164 s

❖ **Altitude d'un satellite géostationnaire :**

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{G \times M_T}} \Leftrightarrow h = \sqrt[3]{\frac{G \times M_T \times T^2}{4\pi^2}} - R_T$$

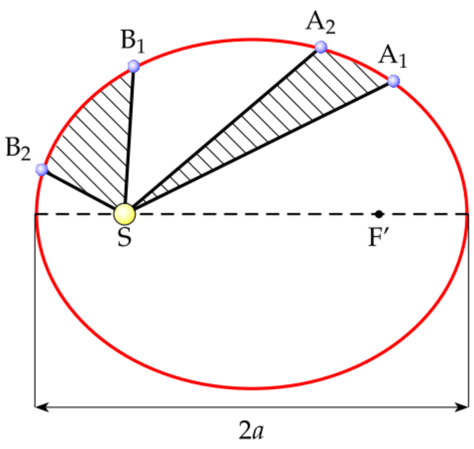
$G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N.m^2.kg^{-2}
$M_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg
T = 86164 s
$R_T = 6{,}37 \times 10^3$ km

A.N. : h = $3{,}58 \times 10^4$ km ≈ **36 000 km**

❖ **Vitesse d'un satellite géostationnaire :**

$$v = \sqrt{G \times \frac{M_T}{R_T + h}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}98 \times 10^{24}}{6{,}37 \times 10^6 + 3{,}58 \times 10^7}}$$ = $3{,}08 \times 10^3$ m.s^{-1} = **11088 km.h^{-1}**

3. Les lois de Kepler



Première loi de Kepler (ou loi des orbites)

Dans un référentiel héliocentrique, la trajectoire d'une planète est une ellipse (ci-contre) et le centre du Soleil occupe un des foyers. L'orbite de la planète est elliptique.

Deuxième loi de Kepler (ou loi des aires)

Le segment reliant le Soleil à la planète balaye des aires égales pendant des durées égales.

Troisième loi de Kepler (ou loi des périodes)

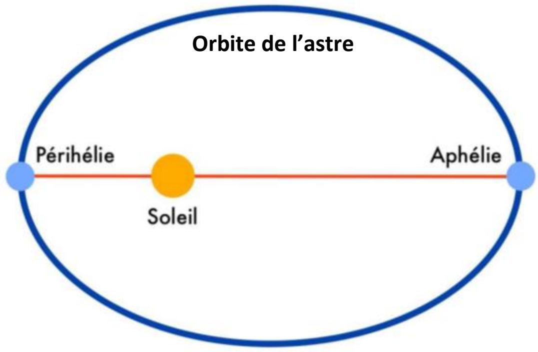
$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \text{constante}} \quad \begin{cases} T = \text{période de révolution de la planète (en s)} \\ a = \text{demi-grand axe de son orbite elliptique (en m)} \end{cases}$$

---

[1] La période de ***rotation sidérale*** est la durée au bout de laquelle la planète retrouve la même orientation par rapport aux étoiles environnantes (environ 23 h 56 min 4,09 s pour la Terre) ; la période de ***rotation synodique*** est la durée au bout de laquelle la planète retrouve la même orientation par rapport à l'étoile (ex : le Soleil, pour la Terre). Elle correspond à la durée du jour sur la planète (environ 24h pour la Terre).

Remarques :

- Le point de la trajectoire le plus éloigné du Soleil se nomme l'**aphélie** (2) ;
- Le point de la trajectoire le plus proche du Soleil se nomme le **périhélie** (3) ;



- D'après la deuxième loi de Kepler, la vitesse d'une planète n'est pas constante : elle augmente lorsqu'elle se rapproche du Soleil et diminue lorsqu'elle s'en éloigne ;
- La constante de la troisième loi de Kepler ne dépend que de l'astre attracteur :

$$\frac{\mathrm{T}^2}{a^3}=\frac{4\pi^2}{G\times \mathrm{M}_{\text{astre}}} \qquad \begin{cases} G=6,67\times 10^{-11}\,\mathrm{m^3.kg^{-1}.s^{-2}} \\ \mathrm{M}_{\text{astre}}=\text{masse de l'astre attracteur (en kg)} \end{cases}$$

- Dans le cas où l'on considère que les trajectoires des planètes et des satellites sont des cercles, on peut déterminer leurs périodes de révolution T en remplaçant, dans la troisième loi de Kepler, le demi-grand axe a de l'ellipse par le rayon R de l'orbite circulaire :

$$\frac{\mathrm{T}^2}{\mathrm{R}^3}=\frac{4\pi^2}{G\times \mathrm{M}_{\text{astre}}} \;\Rightarrow\; \mathrm{T}=2\pi\sqrt{\frac{\mathrm{R}^3}{G\times \mathrm{M}_{\text{astre}}}}$$

→ On retrouve l'expression déterminée au §2.2.

Programme :

Mouvement dans un champ de gravitation Mouvement des satellites et des planètes. Orbite. Lois de Kepler. Période de révolution. Satellite géostationnaire.	Déterminer les caractéristiques des vecteurs vitesse et accélération du centre de masse d'un système en mouvement circulaire dans un champ de gravitation newtonien. Établir et exploiter la troisième loi de Kepler dans le cas du mouvement circulaire. **Capacité numérique** : Exploiter, à l'aide d'un langage de programmation, des données astronomiques ou satellitaires pour tester les deuxième et troisième lois de Kepler.

[2] Nom masculin. Quand l'astre attracteur est la Terre, on parle d'apogée.
[3] Nom masculin. Quand l'astre attracteur est la Terre, on parle d'apogée.