Chapitre 20 : Mécanique des fluides

1. Poussée d'Archimède

Archimède de Syracuse est un savant grec qui vécut à Syracuse connu pour ses multiples travaux scientifiques, théoriques ou pratiques que ce soit en mathématique ou en physique. Dans son « *Traité des corps flottants* », Archimède énonce les lois de la statique des fluides – et des conditions d'équilibre des corps solides immergés dans un fluide ou flottant sur lui – et étudie avec rigueur l'immersion d'un corps, solide ou fluide, dans un fluide de densité inférieure, égale ou supérieure. Il contient d'autres propositions relatives à la poussée d'Archimède.

Énoncé du théorème d'Archimède :

« *Tout corps plongé dans un fluide (liquide ou gaz) au repos, entièrement mouillé par celui-ci ou traversant sa surface libre, subit une force verticale, dirigée de bas en haut et égale (et opposée) au poids du volume de fluide déplacé*. »

En pratique, la **poussée d'Archimède** est une force qui s'applique sur les objets qui sont dans un fluide, comme l'eau et qui fait flotter un objet, ou qui le fait paraître moins lourd dans l'eau quand il ne flotte pas. Elle est en fait une *résultante* de forces pressantes, c'est-à-dire la somme de plusieurs petites forces qui s'exercent sur cet objet : ces forces sont causées par la pression du fluide sur chaque petite partie de la surface de l'objet.

Caractéristiques :

$$\vec{P}_A \left| \begin{array}{l} \textit{point d'application} : \text{centre de masse du fluide déplacé, appelé « centre de poussée »} \\ \textit{direction} : \text{la verticale} \\ \textit{sens} : \text{de bas en haut} \\ \textit{intensité} : P_A = \underbrace{\rho_{\text{fluide}} \times V_{\text{immerge}}}_{m_{\text{fluide}}} \times g \end{array} \right.$$

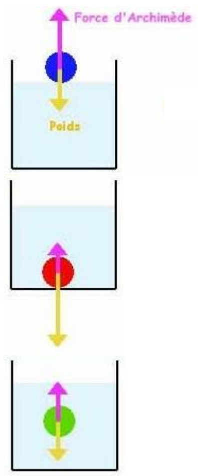
$$\left| \begin{array}{l} \rho = \text{masse volumique du fluide déplacé (en kg.L}^{-1}) \\ V_{\text{immergé}} = \text{volume de fluide déplacé ou volume corps immergé (en L)} \\ g \cong 9{,}81\ N.kg^{-1} \end{array} \right.$$

Remarques :

- La poussé d'Archimède se note aussi : $\vec{A}$;
- D'après la définition de la poussée d'Archimède :

$$\vec{P}_A = -\underbrace{\vec{P}_{\text{fluide}}}_{\text{Poids du fluide déplacé}} = -\, m_{\text{fluide}} \times \vec{g}$$

Conditions de flottabilité (ou flottaison) :



- Un objet **flotte** si $P_{solide} < P_A \Leftrightarrow \rho_{fluide} > \rho_{solide}$;
- L'objet **coule** si $P_{solide} > P_A \Leftrightarrow \rho_{solide} > \rho_{fluide}$;
- L'objet se situe **entre deux eaux**, dans le cas limite où $P_{solide} = P_A$ (voir ci-contre)

2. Écoulement d'un fluide

Un **fluide** peut être considéré comme un système formé d'un grand nombre de particules matérielles, très petites et libres de se déplacer les unes par rapport aux autres. Un fluide est donc un milieu matériel continu, déformable, sans rigidité et qui peut s'écouler. Parmi les fluides, on fait souvent la distinction entre liquides et gaz.

Les liquides et les gaz habituellement étudiés sont isotropes, mobiles et visqueux :

- **Isotropie** : les propriétés physiques du fluide sont identiques dans toutes les directions de l'espace ;

- **Mobilité** : le fluide n'a pas de forme propre, il prend la forme du récipient qui le contient ;
- **Viscosité** : ensemble des phénomènes de résistance (frottements) lors de l'écoulement du fluide.

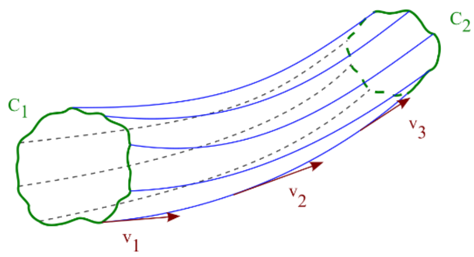
→ La propriété physique qui permet de faire la différence entre les deux est la compressibilité.

2.1. Définitions

- Un fluide est dit **parfait** s'il est possible de décrire son mouvement sans tenir compte des effets de viscosité (fluide non visqueux) et de conduction thermique, c'est donc un fluide dont l'écoulement se fait sans frottement ;
- Un **fluide incompressible** est un fluide dont le volume est considéré comme constant quelle que soit la pression qu'il subit : sa masse volumique reste constante ;

↳ Les liquides sont incompressibles et peu dilatables.

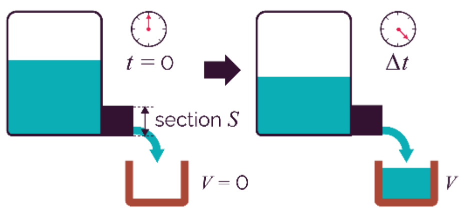
- Une **ligne de courant** : en régime stationnaire, c'est la courbe suivant laquelle se déplace un élément de fluide et qui, à tout instant, possède en tout point une tangente parallèle à la vitesse des particules du fluide ;
- Un **tube de courant** : c'est un ensemble de lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé.



: ligne de courant
: tube de courant

- Un écoulement est dit **permanent** (ou **stationnaire**) si les paramètres qui le caractérisent (pression, température, vitesse, masse volumique, ...), ont une valeur constante au cours du temps.

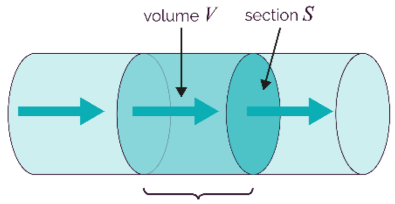
2.2. Débit volumique



Le débit volumique **D$_V$** (ou Q$_V$) est égal au volume de liquide qui sort du réservoir (ci-contre) par unité de temps, c'est-à-dire qu'il est égal au rapport du **volume V** de liquide qui sort, par la section S, sur la durée **Δt** mise pour sortir du réservoir.

$$\mathbf{D_V} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{\Delta t}}$$

V = volume de liquide qui sort du réservoir (en m^3)
Δt = durée de l'écoulement (en s)
D$_V$ = débit volumique (en m^3·s^{-1})



$\ell = v \times \Delta t$

Si l'on considère un liquide qui s'écoule dans un tuyau et dont le débit volumique D$_V$ est constant alors le **volume V** de liquide traversant une section S du tuyau pendant une durée Δt peut s'écrire :

$$\mathbf{V = S \times \ell = S \times v \times \Delta t}$$

Avec :
- V = volume de liquide qui traverse la section (en m^3) ;
- S = section du tuyau (en m^2) ;
- ℓ = longueur de la colonne de liquide qui traverse la section (en m) ;
- **v** = **vitesse d'écoulement** du liquide dans la section (en m·s^{-1}) ;
- Δt la durée, en s.

On peut exprimer le débit volumique en utilisant l'expression précédente :

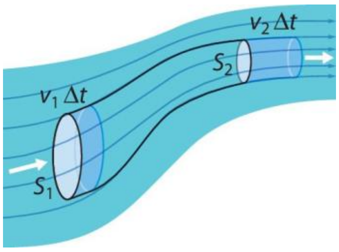
$$\mathbf{D_V} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{\Delta t}} = \frac{\mathbf{S} \times \boldsymbol{\ell}}{\mathbf{\Delta t}} = \mathbf{S} \times \mathbf{v}$$

Le débit volumique peut donc s'exprimer en fonction de la surface S de la section du tuyau et de la vitesse v d'écoulement du liquide dans le tuyau :

$$\mathbf{D_V} = \mathbf{S} \times \mathbf{v}$$

S = section du tuyau (en m^2)
v = vitesse d'écoulement du liquide dans le tuyau (en m·s^{-1})
D$_V$ = débit volumique (en m^3·s^{-1})

Au cours de l'écoulement en **régime permanent** (ou **stationnaire**) d'un fluide incompressible (voir $2.2.1.) , il y a **conservation du débit volumique** :



$$\mathbf{D_V = S_1 \times v_1 = S_2 \times v_2 = Constante}$$

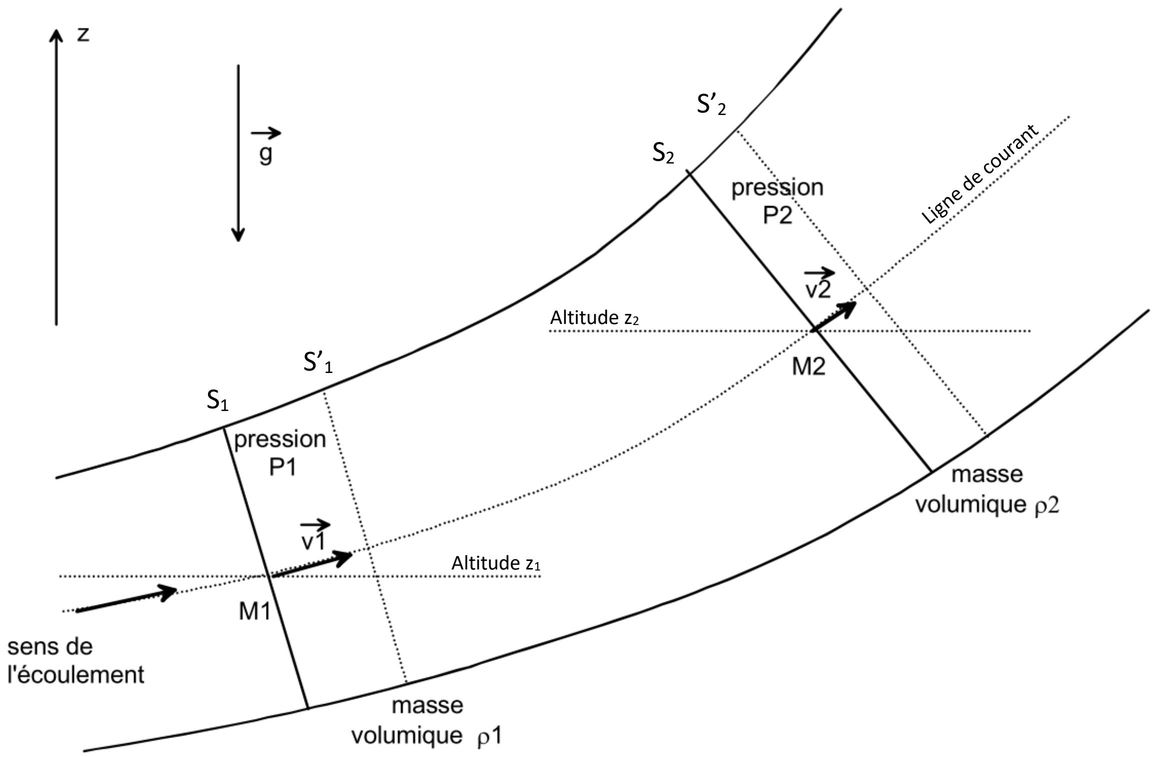
Démonstration : la conservation de la masse implique la conservation du volume, si la masse volumique du fluide est constante, donc le volume V_1 traversant la section S_1 est égal au volume V_2 traversant la section S_2, pour une même Δt durée d'écoulement :

$$V_1 = S_1 \times v_1 \times \Delta t = V_2 = S_2 \times v_2 \times \Delta t \Rightarrow S_1 \times v_1 = S_2 \times v_2 \Rightarrow D_{v1} = D_{v2}$$

2.3. Relation de Bernoulli

Le **théorème** (ou relation) **de Bernoulli** est un principe de conservation de l'énergie sous certaines hypothèses de l'écoulement, établi en 1738 par Daniel Bernoulli. Il formalise le principe de Bernoulli, qui énonce que pour l'écoulement incompressible, parfait et stationnaire d'un fluide homogène soumis uniquement aux forces de pression et de pesanteur, une augmentation de vitesse entraîne une diminution de pression.

Soit une masse m de fluide parfait, de volume V, entre les sections S_1 et S_2 à l'instant t (ci-dessous). À l'instant t + Δt, cette masse de fluide se trouve entre S'_1 et S'_2 :



En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à ce fluide (la variation d'énergie cinétique est égale à la somme des travaux des forces extérieures : poids et forces pressantes), entre les instants t et t + Δt, on obtient :

$$\frac{1}{V}\times\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{V}\times mgz_1 + \frac{1}{V}\times P_1 \times V = \frac{1}{V}\times\frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{V}\times mgz_2 + \frac{1}{V}\times P_2 \times V$$

$$\Leftrightarrow \rho\frac{v_1^2}{2} + \rho g z_1 + P_1 = \rho\frac{v_2^2}{2} + \rho g z_2 + P_2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{\rho\frac{v^2}{2} + \rho g z + P = \mathrm{Constante}}}$$

$$\boxed{\rho = \frac{m}{V}}$$

Cette équation traduit en fait la conservation de l'énergie de la masse m de fluide le long d'une ligne de courant, entre les instants t et t + Δt, avec :

- $\boldsymbol{\frac{1}{V}\times\frac{1}{2}mv^2} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\rho\, v^2}$: densité volumique d'énergie cinétique (énergie cinétique par unité de volume) ;
- $\boldsymbol{\frac{1}{V}\times mgz = \rho g z}$: densité volumique d'énergie potentielle de pesanteur ;

- $\frac{1}{V} \times P \times V = P$: densité volumique d'énergie élastique (intensité de la force qu'exerce le fluide par unité de surface).

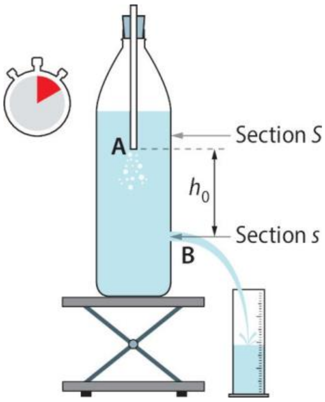
Remarque : statique des fluides

Si le fluide est au repos, dans le référentiel terrestre, alors la relation s'écrit :

$$\rho g z + P = \text{Constante}$$

(Relation fondamentale de la statique des fluides)

Remarque : formule (ou théorème) de Torricelli



En appliquant le relation (Théorème) de Bernoulli ci-dessus :

- $p_A = p_B = p$;
- $V_A = 0$ m/s ;
- $V_B = V$;
- $z_A - z_B = h_0$.

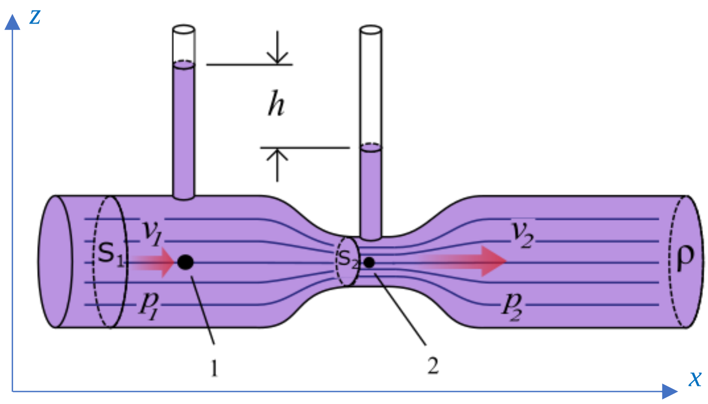
$\cancel{\rho} g z_A + \cancel{p} = \frac{\rho V_B^2}{2} + \cancel{\rho} g z_B + \cancel{p} \Leftrightarrow \rho g z_A - \rho g z_B = = \frac{\rho V_B^2}{2} \Leftrightarrow V^2 = 2gh_0$

On obtient ainsi la **formule** (ou **théorème**) **de Torricelli** :

$$\boxed{V^2 = 2gh_0}$$

2.4. Effet Venturi

L'**effet Venturi**, du nom du physicien italien Giovanni Battista Venturi, est le nom donné à un phénomène de la dynamique des fluides, selon lequel un fluide en écoulement subit une dépression là où la vitesse d'écoulement augmente, ou là où la section d'écoulement se rétrécit.



Un conduit de section principale S_1 (ci-contre) subit un étranglement en 2 où sa section est S_2.

La vitesse du fluide augmente dans l'étranglement, donc sa pression y diminue :

$$\mathbf{v_2 > v_1 \Rightarrow p_2 < p_1}$$

(Effet Venturi)

Démonstration :

La conservation du débit implique : $S_1 \times v_1 = S_2 \times v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{S_1}{S_2} \times v_1$

Le théorème de Bernoulli implique : $\rho \frac{v_1^2}{2} + \rho g z_1 + p_1 = \rho \frac{v_2^2}{2} + \rho g z_2 + p_2$

Si $z_1 = z_2$ alors :

$$\rho \frac{v_1^2}{2} + p_1 = \rho \times \frac{1}{2}\left(\frac{S_1}{S_2} \times v_1\right)^2 + p_2 \Leftrightarrow p_2 = p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2}\left(1 - \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2\right)$$

Or $1 - \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2 < 0$ car $S_1 > S_2$ donc $\frac{\rho v_1^2}{2}\left(1 - \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2\right) < 0$ donc $\boxed{p_2 < p_1}$

Exemples d'application :

- Carburateurs de petits moteurs : tondeuse à gazon, scooter à essence, moto, voiture ancienne, … ;
- L'explosion (implosion) des fenêtres lors d'une tornade : le vent soufflant à grande vitesse crée une basse pression, l'air à l'intérieur de la maison se précipite pour occuper ce vide et bris le verre de la fenêtre ;
- Portance d'une aile d'avion ;
- Pistolet à peinture, flacon de parfum ;
- …